Calcul de sommes et produits

EXERCICE 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1) $1+2+...+(n-1)+n+(n-1)+...+2+1$ pour $n \geq 2$.
2) $2+4+6+...+2n$ puis $1+3+5+...+(2n-1)$.
3) $\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+...+\frac{n-1}{n}$.

EXERCICE 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes

$$S_1 := \sum_{i=1}^{n} e^{2i}; \quad S_2 := \sum_{i=1}^{n} (i-1)(i+2);$$

EXERCICE 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Simplifier les produits :

$$\prod_{k=1}^{n} 2^k; \quad \prod_{k=1}^{n} 2k; \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{3k}{3k+3}\ ; \quad \prod_{p=1}^{n} \frac{2p+1}{2p+5}.$$

EXERCICE 4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1) Démontrer que, pour tout $1 \leq k \leq n$, $\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$.
2) Calculer, en fonction de n, la valeur de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$.

EXERCICE 5. Soient $n \in \mathbb{N}$, $(x_i)_{i=1,...,n}$ et $(y_i)_{i=1,...,n}$ deux familles de réels telles que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $x_i \leq y_i$. Démontrer

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

EXERCICE 6. Montrer pour tout entier $n \geq 1$,

$$\prod_{i=0}^{n} \left(1+\frac{1}{2i+1}\right)^2 > 2n+3.$$

EXERCICE 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes $\sum_{k=1}^{n} 2^k$, et $\sum_{k=1}^{n} x^k$ où $x \neq 1$.

EXERCICE 8. On considère $S_n = \sum_{k=1}^{n} kx^k$ ou x est un réel différent de 1. Calculons S_n de deux façons.

1) Calculer $(1-x)S_n$ et déduire S_n.
2) Dériver la somme $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$ de deux façons, et en déduire S_n.

EXERCICE 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer $\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)$ en fonction de n.
2) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ en fonction de n.

EXERCICE 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$, $\quad \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j}$, $\quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$

(pour la dernière somme, on ne cherchera pas à calculer la somme $\sum_{i=1}^{n} i^3$).

EXERCICE 11. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) + 1$.

Montrer par récurrence forte que $u_n = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Factorielles et Coefficient binomiaux

EXERCICE 12.

1) Écrire à l'aide de factorielles
   a) $17 \times 16 \times 15 \times 14$
   b) $16 \times 14 \times 12 \times ... \times 4 \times 2$
   c) $15 \times 13 \times 11 \times ... \times 5 \times 3 \times 1$
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\dfrac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$.

EXERCICE 13.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kk! = (n+1)! - 1$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

EXERCICE 14. Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite calculer de deux manières différentes la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

1) Soit f la fonction définie pour tout $x \in [0, +\infty[$ par $f(x) = (1+x)^n$. On admet que f est dérivable sur $[0, +\infty[$.
   a) Calculer la dérivée de f de deux façons différentes.
   b) Conclure.
2) a) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, $k \geq 1$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.
   b) Retrouver S_n

EXERCICE 15. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

Exercice plus difficile

EXERCICE 16. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Soit k, p des entiers tels que $0 \leq k \leq p \leq n$. Vérifier

$$\binom{n}{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}.$$

2) En déduire que pour tour entier $0 \leq p \leq n$:

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^p\binom{n}{p}$$

puis

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 3^n.$$

3) ☆ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k.$$

Montrer la formule d'inversion de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}\binom{n}{p}b_p = a_n.$$